Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych - wstęp

Pojęcia wstępne

Definicja. *Przestrzenią dwuwymiarową* $\mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych par (x, y), gdzie x, $y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Pary (x, y) nazywamy punktami przestrzeni $\mathbb{R}^2$ (płaszczyzny).

Definicja. *Odległością punktów* $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ nazywamy liczbę:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Definicja. *Otoczeniem punktu* P_0 o promieniu $r>0$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór:

$$U(P_0, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 : |P_0P| < r\}.$$

Definicja. *Sąsiedztwem punktu* P_0 o promieniu $r > 0$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór:

$$S(P_0, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 : 0 < |P_0P| < r\}.$$

Czyli otoczenie punktu na płaszczyźnie jest to wnętrze koła o środku w tym punkcie, natomiast sąsiedztwo jest to wnętrze koła, ale bez środka.

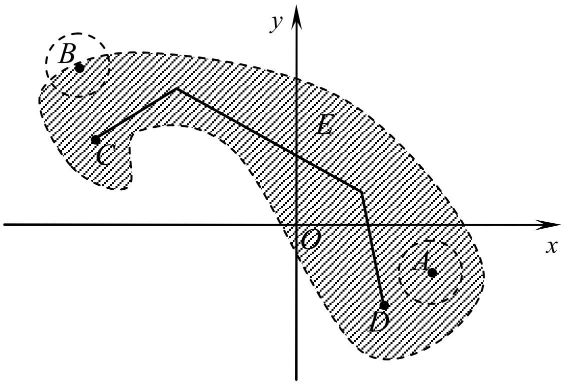
Definicja. Punkt P_0 nazywamy *punktem wewnętrznym* zbioru $E \subset \mathbb{R}^2$, jeżeli należy on do zbioru E wraz z pewnym swoim otoczeniem (punkt A na rysunku 1), tzn. istnieje taka liczba dodatnia r, dla której $U(P_0, r) \subset E$.
Wnętrzem zbioru E nazywamy zbiór wszystkich jego punktów wewnętrznych.

Definicja. Punkt P_0 nazywamy *punktem brzegowym* zbioru $E \subset \mathbb{R}^2$, jeżeli w każdym otoczeniu tego punktu istnieją punkty należące do zbioru E oraz istnieją punkty nienależące do zbioru E (punkt B na rysunku 1).
Brzegiem zbioru E nazywamy zbiór wszystkich jego punktów brzegowych.
Zauważmy, że punkt brzegowy zbioru E może do niego należeć lub nie. Przykładowo, każdy punkt okręgu o promieniu r jest zarówno punktem brzegowym wnętrza tego okręgu, jak i koła o promieniu r.

Definicja. Zbiór $E \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy *otwartym,* jeżeli każdy punkt tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym.

Definicja. Zbiór $E \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy *domkniętym,* jeżeli zawiera swój brzeg.

Definicja. Zbiór $E \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy *obszarem*, jeżeli jest to zbiór otwarty oraz każde dwa punkty tego zbioru można połączyć linią łamaną zawartą w zbiorze E (rysunek 1).



Rys. 1. Punkt wewnętrzny (A), punkt brzegowy (B) obszaru E

Definicja. Obszar E wraz z brzegiem nazywamy *obszarem domkniętym.*

Uwaga. Analogicznie określamy przestrzeń n-wymiarową $\mathbb{R}^n$ oraz formułujemy definicje podobne do podanych powyżej.

Funkcje dwóch i większej liczby zmiennych

Pomimo, że w dalszych rozważaniach skupiamy się przede wszystkim na funkcjach dwóch (rzadziej trzech) zmiennych, to należy podkreślić, że podobne definicje i twierdzenia można formułować dla funkcji większej liczby zmiennych.

Definicja. Jeżeli każdemu punktowi (x, y) należącemu do pewnego zbioru płaskiego E przestrzeni $\mathbb{R}^2$ przyporządkujemy dokładnie jedną liczbę rzeczywistą z, to określamy na zbiorze E *funkcję dwóch zmiennych* niezależnych x i y. Funkcję taką oznaczamy $f : E \to \mathbb{R}$ lub $z = f(x, y)$.

Analogicznie określamy funkcję większej liczby zmiennych.

Definicja. *Dziedziną* (*naturalną*) *funkcji* $z = f(x, y)$, nazywamy zbiór D_f tych wszystkich par (x, y), dla których wzór określający funkcję ma sens.

Przykład. Wyznaczyć (narysować) dziedzinę funkcji

$$z = \ln(x^2 + 2x - 3) + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} .$$

Rozwiązanie. Biorąc pod uwagę prawą stronę wzoru określającego funkcję widzimy, że musimy uwzględnić następujące założenia:

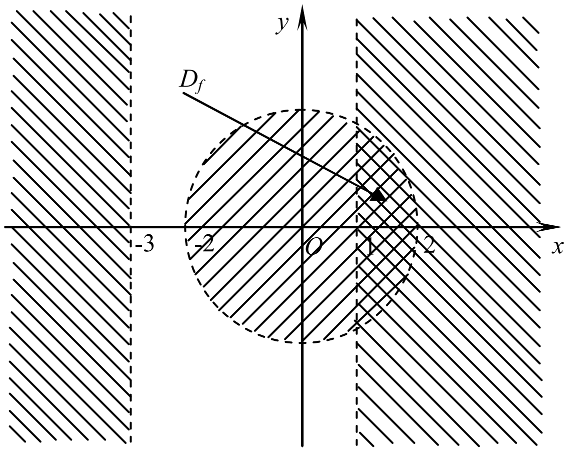
1) $x^2 + 2x - 3 > 0$ (jako wyrażenie logarytmowane) ,

2) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \neq 0 \\ 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - x^2 - y^2 > 0 .$

ad. 1) $\Delta = 16$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, to $x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$,
y – dowolne,

ad. 2) $4 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4$, a ta nierówność przedstawia wnętrze koła o środku w punkcie $S(0, 0)$ i promieniu $r = 2$.

Rozwiązania obu nierówności zaznaczamy w układzie współrzędnych. Część wspólna otrzymanych zbiorów (rysunek 2) jest szukaną dziedziną D_f.



Rys. 2.

Definicja. *Wykresem funkcji* $z = f(x, y)$ nazywamy zbiór:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f \ , z = f(x, y)\}.$$

Uwaga. Wykresami funkcji dwóch zmiennych są na ogół pewne powierzchnie w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Aby ułatwić sobie ich zobrazowanie można zbadać, jak wyglądają przekroje tych powierzchni płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn układu współrzędnych. Często bierze się tutaj płaszczyzny równoległe do płaszczyzny *Oxy*, otrzymując tzw. poziomice wykresu funkcji.

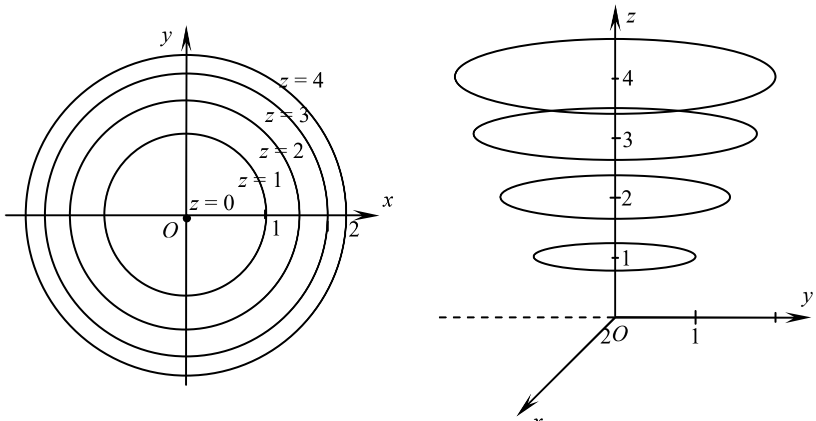
Przykład. Znaleźć poziomice oraz naszkicować wykres funkcji

$$z = x^2 + y^2.$$

Rozwiązanie. Poziomice otrzymamy podstawiając w miejsce z konkretne wartości. Łatwo stwierdzić, że dla naszej funkcji nie mogą być to liczby ujemne.

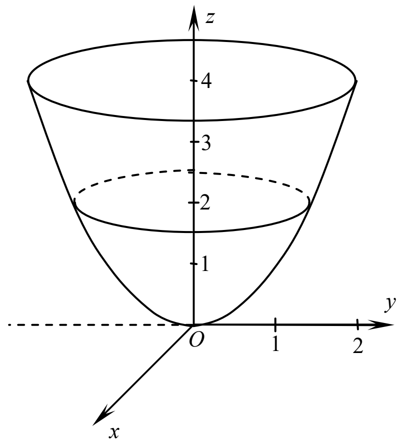
- dla $z = 0$, mamy $x^2 + y^2 = 0$ – równanie to spełnia tylko punkt $(0,0)$,
- dla $z = 1$, mamy $x^2 + y^2 = 1$ – okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu $r = 1$,
- dla $z = 2$, mamy $x^2 + y^2 = 2$ – okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$,
- dla $z = 3$, mamy $x^2 + y^2 = 3$ – okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu $r = \sqrt{3}$
- dla $z = 4$, mamy $x^2 + y^2 = 4$ – okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu $r = 2$,

Rysunek 3 przedstawia otrzymane poziomice oraz te same poziomice umieszczone na odpowiednich wysokościach w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.



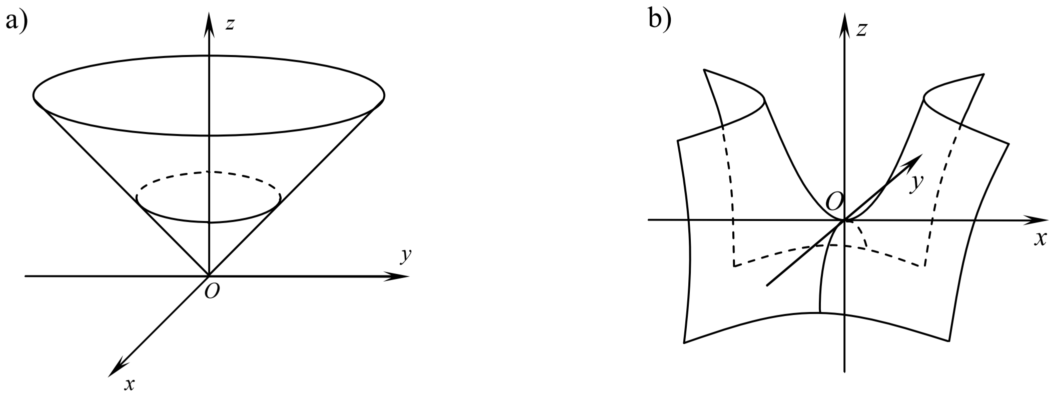
Rys. 3.

Wykresem naszej funkcji będzie zatem powierzchnia (tzw. paraboloida) przedstawiona na rysunku 4.



Rys. 4. Wykres funkcji $z = x^2 + y^2$

Na rysunku 5 przedstawiono dla przykładu wykresy jeszcze dwóch innych funkcji.



Rys. 5. Wykresy funkcji: a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, b) $z = xy$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Znaleźć i narysować dziedziny funkcji:

1. $z(x, y) = \sqrt{2x - y + 3}$, **2.** $z(x, y) = \dfrac{y^2 - 1}{\sqrt{1 - x}} + \ln(x - y)$,

3. $z(x, y) = \dfrac{2\sqrt{y}}{x - 1} + \sqrt[4]{2x - y - x^2}$, **4.** $z(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2) + \sqrt{1 - x}$,

5. $z(x, y) = 2\ln(4x - x^2 - 3) + \arcsin(y + 3)$,

6. $u(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch